Minggu-5

KONSEP DASAR PROBABILITAS

Tujuan Pembelajaran

- Memahami dan menggunakan analisis kombinatorial untuk kejadian kompleks: permutasi dan kombinasi
- Mendefinisikan terminologi-terminologi penting dalam probabilitas dan menjelaskan bagaimana probabilitas kejadian sederhana ditentukan
- Memahami dan menjelaskan konsep-konsep mengenai kejadian-kejadian bersyarat, bebas dan *mutually exclusive*
- Menggunakan dengan benar dan tepat aturan perkalian dan penjumlahan dalam melakukan perhitungan probabilitas

AGENDA

- Pendahuluan
- Permutasi dan Kombinasi
- Konsep Probabilitas

1. Pendahuluan

- **Probabilitas**
  - intepretasi keluaran peluang yang terjadi dalam suatu percobaan
  - Tingkat kepastian dari munculnya hasil percobaan statistik
  - Dilambangkan dengan P
- Konsep probabilitas berasal dari permainan yang dilakukan pengamatan untuk diperoleh fakta (empiris) kemudian diformulakan kedalam konsep dan dilakukan pengujian
- Matematika permutasi dan kombinasi banyak digunakan dalam probabilitas

2. Permutasi dan Kombinasi

- **Faktorial**

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1$$

$$0! = 1 \text{ dan } 1! = 1$$

- **Permutasi**

susunan yang dibentuk dari anggota suatu himpunan dengan mengambil seluruh atau sebagian anggota himpunan dan memberi arti pada urutan anggota dari susunan

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

2. Permutasi dan Kombinasi (Con't)

- Contoh

Himpunan {a,b,c}

diambil 3 anggota, diperoleh susunan:

abc; acb; bac; bca; cab; cba

$$ {}_{3}P_{2} = \frac{3!}{(3-3)!} = 6 $$

diambil 2 anggota, diperoleh susunan:

ab; ba; bc; cb; ac; ca

$$ {}_{3}P_{2} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6 $$

2. Permutasi dan Kombinasi

- **Contoh**

  Berapa banyak carakah cabang dari PII menjadwalkan 3 pembicara untuk 3 pertemuan yang berbeda bila mereka hadir pada masing-masing dari 5 janji yang mungkin?

  Penyelesaian:

  Jumlah total jadwal yang mungkin adalah

$${}_5P_3 = \frac{5!}{2!} = (5)(4)(3) = 60$$

2. Permutasi dan Kombinasi

- Permutasi dari sebagian anggota yang sama. Banyaknya permutasi yang berlainan dari n sampel bila n_1 berjenis I, n_2 berjenis II, …, n_k berjenis k diberikan oleh

$$\binom{n}{n_1 \quad n_2 \quad \ldots \quad n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

2. Permutasi dan Kombinasi

Contoh

Dalam berapa carakah 7 ilmuwan dapat disatukan ke dalam kamar hotel dengan satu kamar tiga tempat tidur dan dengan dua kamar dua tempat tidur?

Penyelesaian:

Jumlah total partisi yang mungkin adalah

$$\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!\quad 2!\quad 2!} = 210$$

2. Permutasi dan Kombinasi (Con't)

- Kombinasi

susunan yang dibentuk dari anggota suatu himpunan dengan mengambil seluruh atau sebagian anggota himpunan dan *tanpa memberi arti* pada urutan anggota dari susunan

$$ {}_{n}C_{r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

Contoh: himpunan {a,b,c} diambil 2 anggota,
diperoleh susunan: ab; bc; ca
{Permutasi ab = ba; bc = cb; ca = ac}

2. Permutasi dan Kombinasi (Con't)

Contoh

Ada berapa banyak cara untuk 3 pria, 5 wanita, 4 pemuda dan 4 gadis dapat dipilih dari 7 pria, 9 wanita, 5 pemuda, dan 5 gadis jika:

a. Semua orang bebas pada masing-masing kelompok

b. Seorang pria dan wanita tertentu harus terpilih

c. Seorang pria, 1 wanita, 1 pemuda, dan 1 orang gadis ttidak boleh dipilih.

Penyelesaian

a. Semua orang bebas pada masing-masing kelompok

Banyak cara = 7C3 * 9C5 * 5C4 * 5C4 = 35*126*5*5 = 110250 cara.

b. Seorang pria dan wanita tertentu harus terpilih

Banyak cara = 5C4 * 5C4 = 25 cara.

c. Seorang pria, 1 wanita, 1 pemuda, dan 1 orang gadis tidak boleh dipilih

Banyak cara = 6C3 * 8C5 * 4C4 *4C4= 20*56*1*1 = 1120 cara.

3. Konsep Probabilitas

- Derajat/tingkat kepastian dari munculnya hasil percobaan statistik disebut *probabilitas/peluang, P* $0 \le P(A) \le 1$
- Bila kejadian E terjadi dalam *m* cara dari seluruh *n* cara yang mungkin terjadi dan mempunyai kesempatan yang sama untuk muncul $$P(E) = \frac{m}{n}$$
- Jika kejadian *E* terjadi sebanyak *f* kali dari seluruh pengamatan sebanyak *n*, dimana *n* mendekati tak berhingga, maka probabilitas kejadian E $$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{f}{n}$$

3. Konsep Probabilitas

- Definisi Klasik
  - Jika sebuah peristiwa A dapat terjadi dengan f_A cara dari sejumlah total N cara yang *mutually exclusive* dan memiliki kesempatan sama untuk terjadi, maka probabilitas terjadinya peristiwa A dinotasikan dengan $P(A)$ dan didefinisikan sebagai:

$$P(A) = \frac{f_A}{N}$$

  - Sedangkan probabilitas tidak terjadinya suatu peristiwa A atau komplemen A (sering disebut kegagalan A) dinyatakan sebagai:

$$P(\bar{A}) = P(\tilde{A}) = P(\sim A) = \frac{N - f_A}{N} = 1 - \frac{f_A}{N} = 1 - P(A)$$

3. Konsep Probabilitas

Contoh

Definisi klasik cocok digunakan misalnya pada permainan tembakan/undian (*games of chance*). Misalnya dalam satu set kartu bridge yang terdiri dari 52 kartu terdapat 4 buah kartu As, maka probabilitas pengambilan satu kartu mendapatkan kartu As adalah: $P(As) = 4/52 = 1/13 = 0{,}077$

3. Konsep Probabilitas

- Definisi Frekuensi Relatif
  - Seandainya pada sebuah eksperimen yang dilakukan sebanyak *N* kali dan kejadian *A* terjadi sebanyak *fA* kali, maka jika eksperimen tersebut dilakukan tak terhingga kali banyaknya (*N* mendekati tak hingga), nilai limit dari frekuensi relatif *fA/N* didefinisikan sebagai probabilitas kejadian *A* atau *P*(*A*).

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{f_A}{N}$$

3. Konsep Probabilitas

Contoh

Probabilitas mendapatkan sebuah motor baru merek “X” yang cacat saat seorang membelinya mungkin sulit diketahui dengan menggunakan definisi klasik probabilitas. Secara teoritis probabilitas tersebut dapat ditentukan jika dapat diketahui jumlah seluruh (populasi) produk motor baru “X” dan jumlahnya yang cacat.

Penyelesaian:

Jika memakai definisi frekuensi relatif, maka perlu dilakukan pemeriksaan terhadap sampel motor “X” sebanyak mungkin (menuju tak hingga). Namun, karena sangat sulit mengkaji jumlah yang tak terhingga banyaknya, maka jumlah sampel yang memadai dan dapat dipercaya namun cukup ekonomis dapat digunakan untuk menentukan frekuensi relatif tersebut

3. Konsep Probabilitas

- Definisi Subyektif (Intuitif)
  - Dalam hal ini, probabilitas $P(A)$ dari terjadinya peristiwa A adalah sebuah ukuran dari "derajat keyakinan" yang dimiliki seseorang terhadap terjadinya peristiwa A. Definisi ini mungkin merupakan definisi yang paling luas digunakan dan diperlukan jika sulit diketahui besarnya ruang sampel maupun jumlah *event* yang dikaji maupun jika sulit dilakukan pengambilan sampel (*sampling*) pada populasinya.

3. Konsep Probabilitas

Contoh:

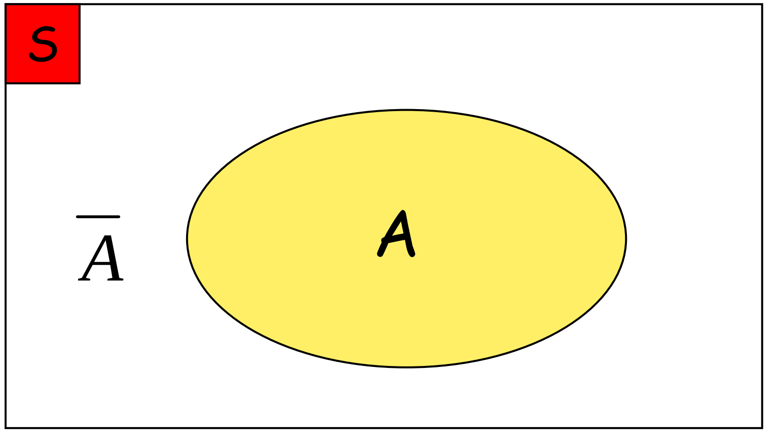
Suatu strategi perang memilih salah satu di antara dua alternatif yang masing-masing memberikan akibat berbeda, yaitu menjatuhkan bom atau tidak menjatuhkan bom ke daerah musuh. Karena masing-masing alternatif itu tidak bisa diuji coba secara eksperimen untuk mengetahui bagaimana musuh akan memberikan reaksi, maka kita harus percaya pada "penilaian dari ahli (*expert judgement*)" untuk menentukan probabilitas dari akibat yang akan muncul. Situasi yang sama terjadi pula misalnya dalam meramalkan siapa yang akan menjuarai suatu turnamen sepakbola. Dalam hal ini, interpretasi klasik dan frekuensi dari probabilitas tidak akan banyak gunanya, dan suatu penilaian yang subyektif dari pengamat sepak bola yang handal lebih diperlukan.

3. Konsep Probabilitas

- Himpunan semua hasil yang mungkin terjadi pada suatu percobaan statistik disebut ruang sampel,S; anggota dari S disebut sampel
  - Pada pelemparan mata uang S={m,b}
  - Pada pelemparan dadu S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
  - Untuk ruang sampel yang besar dinyatakan dengan pernyataan atau aturan
- Himpunan dari hasil yang muncul pada suatu percobaan statistik disebut kejadian (event), A; Anggota dari A disebut titik sampel

3. Konsep Probabilitas

- Diagram Venn



Konsep Probabilitas	Teori Himpunan
- Ruang sampel, S	- Himpunan semesta S
- Kejadian, A	- Himpunan bagian A
- Titik sampel	- Anggota himpunan

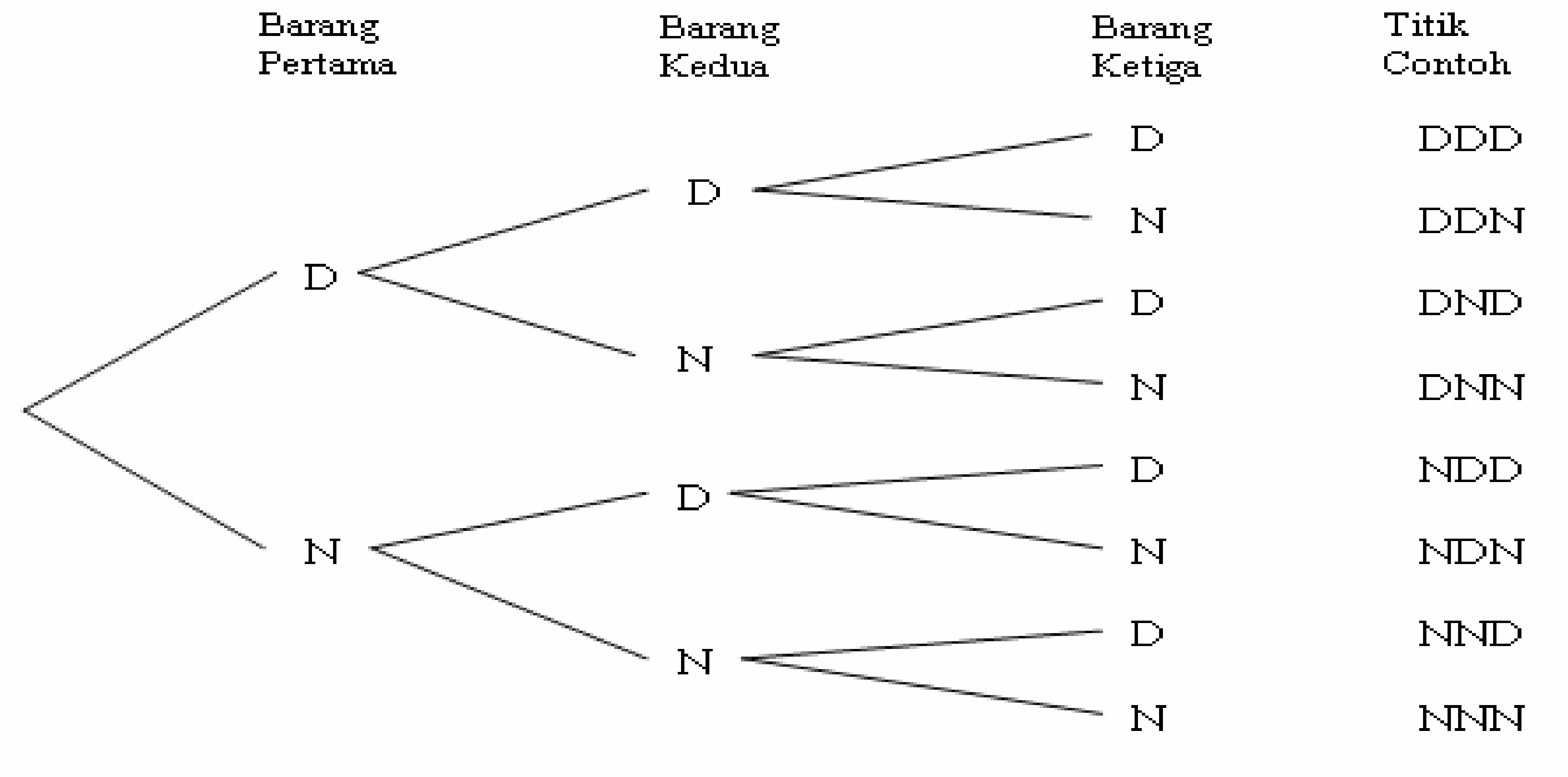
3. Konsep Probabilitas

- Digram Pohon: cara untuk mendapatkan ruang sampel

Contoh:

Andaikan tiga barang dipilih secara acak pada proses pembuatan. Setiap barang diamati dan diklasifikasi apakah cacat, D, atau tidak cacat, N. Buatlah diagram pohon ruang sampelnya

3. Konsep Probabilitas



S = {DDD, DDN, DND, DNN, NDD, NDN, NND, NNN}

3. Konsep Probabilitas

- Bila kejadian A terjadi dalam m cara pada ruang sampel S yang terjadi dalam n cara, maka probabilitas kejadian A adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{m}{n}$$

3. Konsep Probabilitas

Sifat probabilitas kejadian A

a. $0 < P(A) < 1$

b. Bila $A = \varnothing$ (himpunan kosong), artinya A tidak terjadi pada S, maka n(A) = 0, sehingga

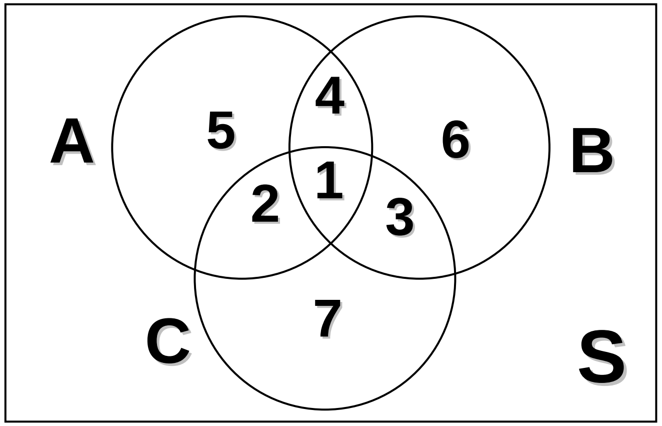
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{n} = 0$$

c. Dalam hal A = S, maka n(A) = n(S) = n, sehingga

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n}{n} = 1$$

3. Konsep Probabilitas

- $A \cap B$ = daerah 1 dan 4
- $B \cap C$ = daerah 1 dan 3
- $A \cap C$ = daerah 1 dan 2
- $A \cup B$ = daerah 1, 2, 3, 4, 5, dan 6
- $B \cup C$ = daerah 1, 2, 3, 4, 6, dan 7
- $A \cup C$ = daerah 1, 2, 3, 4, 5, dan 7
- $A \cap B \cap C$ = daerah 1
- $\overline{B} \cup A$ = daerah 2 dan 5
- $(A \cup B) \cap \overline{C}$ = daerah 4, 5, dan 6



3. Konsep Probabilitas

- Aksioma teori himpunan

a. $A \cap \varnothing = \varnothing$

b. $A \cup \varnothing = A$

c. $A \cap \overline{A} = \varnothing$

d. $A \cup \overline{A} = S$

e. $\overline{S} = \varnothing$

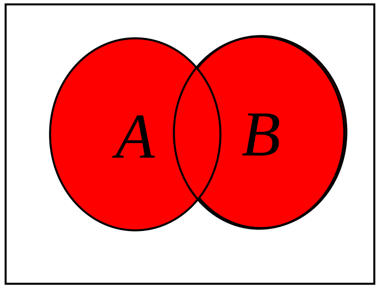
f. $\overline{\varnothing} = S$

g. $\overline{(A \cap B)} = (\overline{A} \cup \overline{B})$

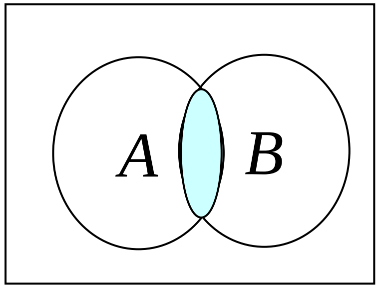
h. $\overline{(A \cup B)} = (\overline{A} \cap \overline{B})$

3. Konsep Probabilitas

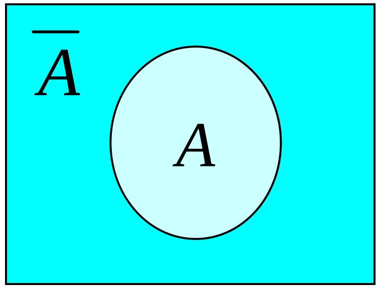
- Probabilitas $A \cup B$ dan $A \cap B$



$A \cup B$



$A \cap B$



$\overline{A}$

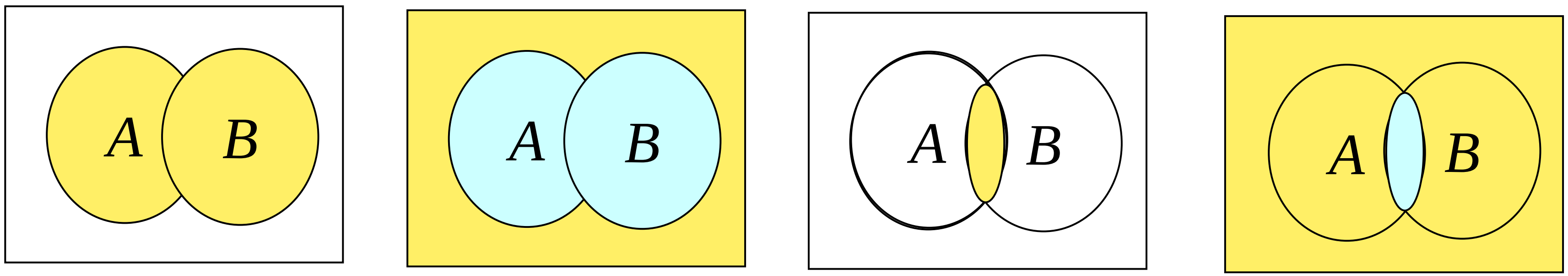
Aturan penjumlahan → $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

3. Konsep Probabilitas

- De-Morgan Law

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}; \qquad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$



$A\cup B$ $\qquad$ $\overline{A\cup B}$ $\qquad$ $A\cap B$ $\qquad$ $\overline{A}\cup\overline{B}$

3. Konsep Probabilitas

Contoh:

Kemungkinan bahwa Paula lulus ujian matematika adalah 2/3, dan kemungkinan ia lulus Bahasa Inggris adalah 4/9. Bila probabilitas lulus keduanya adalah $\frac{1}{4}$, berapakah probabilitas Paula dapat paling tidak lulus salah satu dari kedua pelajaran tersebut?

Penyelesaian:

Bila *M* adalah kejadian "lulus matematika," dan *E* adalah kejadian "lulus Bahasa Inggris," maka dengan aturan penjumlahan kita dapatkan

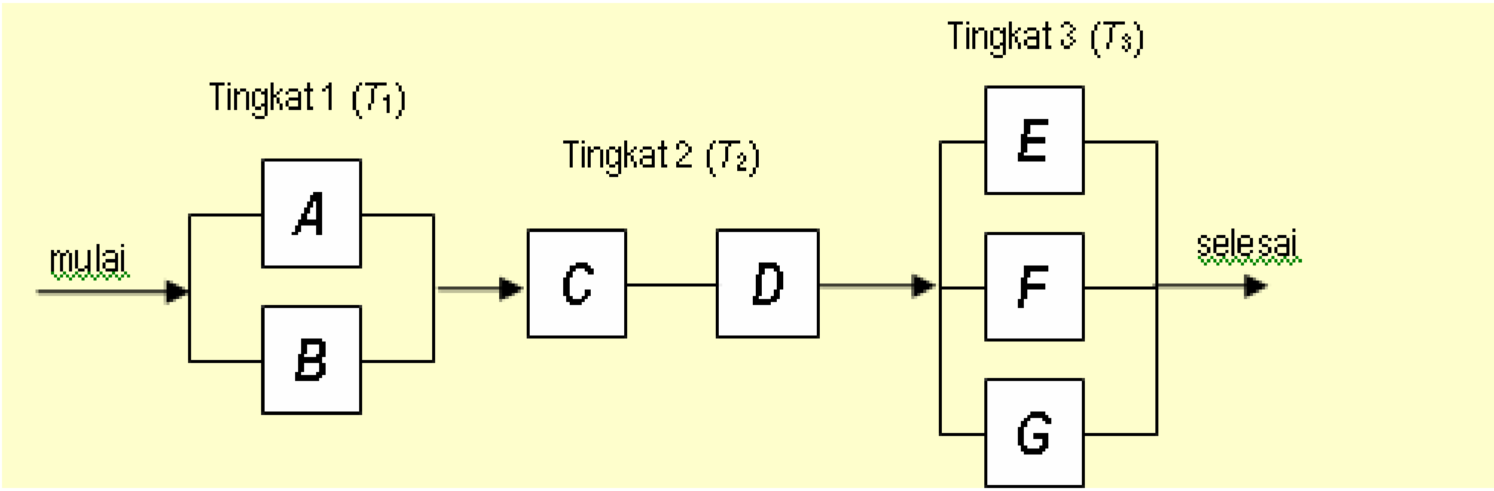
$$P(M \cup E) = P(M) + P(E) - P(M \cap E) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{1}{4} = \frac{31}{36}$$

3. Konsep Probabilitas

Contoh: Sebuah sistem sembarang seperti yang ditunjukkan Gambar 3.6 tersusun atas tiga tingkat. Sistem ini akan bekerja dengan baik jika ketiga tingkatnya berjalan dengan baik. Misalkan seluruh unit dalam setiap tingkat saling bebas dan masing-masing probabilitas berjalan baiknya adalah :

$P(A) = 0{,}7$ $P(B) = 0{,}7$ $P(C) = 0{,}9$ $P(D) = 0{,}8$

$P(E) = 0{,}6$ $P(F) = 0{,}6$ $P(G) = 0{,}6$



3. Konsep Probabilitas

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
P(T_1) &= P(A \text{ atau } B) = P(A \cup B) \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\
&= 0{,}7 + 0{,}7 - (0{,}7)(0{,}7) = 0{,}91 \\
P(T_2) &= P(C \text{ dan } D) = P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D) \\
&= (0{,}9)(0{,}8) = 0{,}72 \\
P(T_3) &= P(E \text{ atau } F \text{ atau } G) = P(E \cup F \cup G) \\
&= P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) - P(E \cap G) - P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G) \\
&= P(E) + P(F) + P(G) - P(E)P(F) - P(E)P(G) - P(F)P(G) + P(E)P(F)P(G) \\
&= 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}6 - (0{,}6)(0{,}6) - (0{,}6)(0{,}6) - (0{,}6)(0{,}6) + (0{,}6)(0{,}6)(0{,}6) \\
&= 0{,}936
\end{aligned}
$$

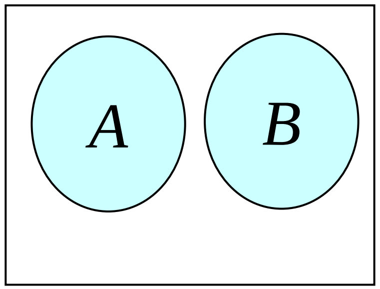
$$
\begin{aligned}
P(\textit{sistem berjalan}) &= P(T_1 \text{ dan } T_2 \text{dan } T_3) = P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) = P(T_1) \cdot P(T_2) \cdot P(T_3) \\
&= (0{,}91)(0{,}72)(0{,}936) = 0{,}613
\end{aligned}
$$

Jadi sistem tersebut secara keseluruhan memiliki 61,3 % kemungkinan dapat berjalan dengan baik.

3. Konsep Probabilitas

- Dua Kejadian Saling Lepas

  Dua kejadian saling lepas terjadi bila A dan B dua kejadian sembarang pada S dan berlaku $A \cap B = 0$ maka A dan B dua kejadian saling lepas (mutually exclusive, ME)



$A \cap B = \phi$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3. Konsep Probabilitas

- Dua Kejadian Saling Bebas

  Dikatakan saling bebas jika kejadian A tidak mempengaruhi kejadian B dan sebaliknya kejadian B tidak mempengaruhi kejadian A

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

3. Konsep Probabilitas

Contoh:

- Diketahui bahwa 30% mesin cuci buatan pabrik X memerlukan perbaikan (*service*) selagi masih dalam masa garansi, sementara hanya 10% mesin pengering buatan pabrik yang sama yang membutuhkan perbaikan. Jika sesorang membeli satu set yang terdiri dari mesin cuci dan mesin pengering probabilitas kedua mesin tersebut memerlukan perbaikan selama masih dalam masa garansi dapat ditentukan dengan hukum perkalian. Jika *C* adalah peristiwa mesin cuci memerlukan perbaikan dan *K* adalah peristiwa mesin pengering memerlukan perbaikan. Maka $P(C) = 0,3$ dan $P(K) = 0,1$. Dengan asumsi bahwa mesin cuci dan mesin pengering berfungsi secara terpisah (saling bebas) satu sama lainnya, maka probabilitas keduanya memerlukan perbaikan selama masa garansi adalah:

$$P(C \text{ dan } K) = P(C \cap K) = P(C) \cdot P(K) = (0,3)(0,1) = 0,03$$

3. Konsep Probabilitas

- Probabilitas Bersyarat

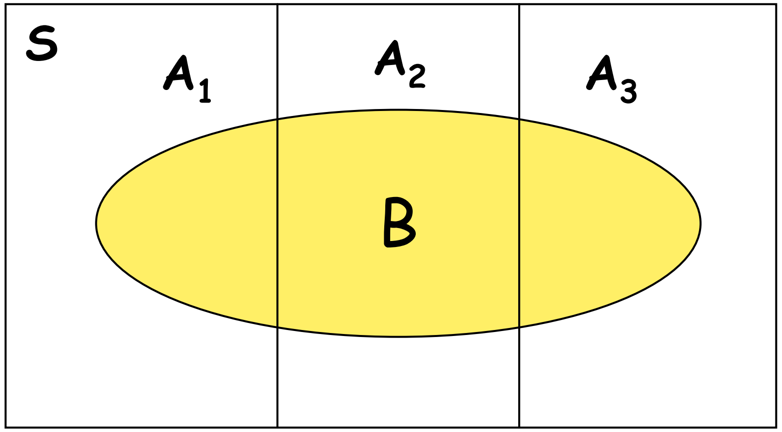
  probabilitas terjadinya kejadian A bila kejadian B telah terjadi

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ atau } P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

- Untuk dua kejadian saling bebas

$$P(A|B) = P(A) \text{ dan } P(B|A) = P(B)$$

3. Konsep Probabilitas



$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3)$$

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3)$$

3. Konsep Probabilitas

$$P(B|A_1) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum P(B|A_i)P(A_i)}$$

$$P(B|A_2) = \frac{P(B \cap A_2)}{P(B)} = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{\sum P(B|A_i)P(A_i)}$$

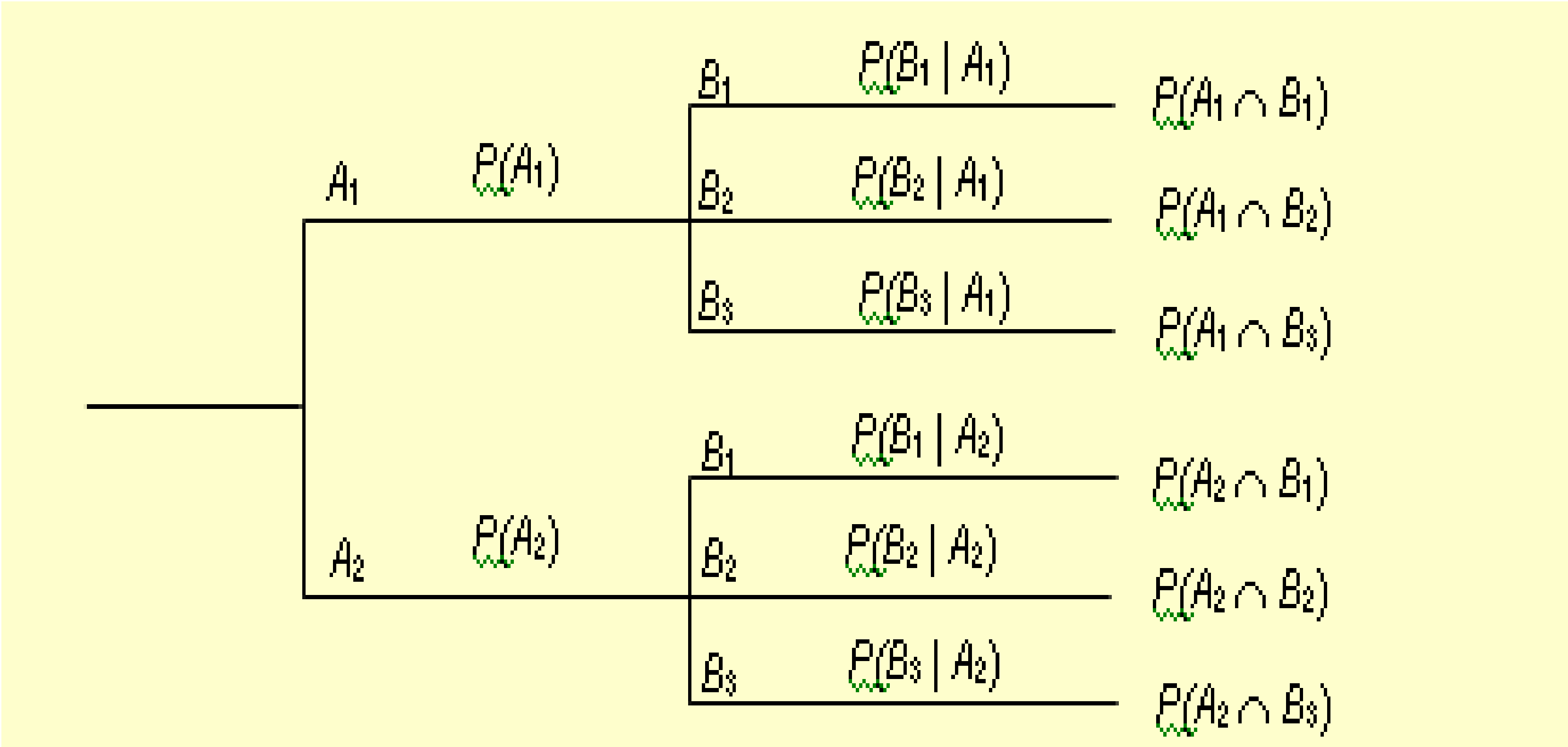
$$P(B|A_3) = \frac{P(B \cap A_3)}{P(B)} = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{\sum P(B|A_i)P(A_i)}$$

$$P(B|A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum P(B|A_i)P(A_i)}$$

→ Aturan Bayes

3. Konsep Probabilitas

Pohon Probabilitas



3. Konsep Probabilitas

Contoh

Vendor I, II, III, dan IV menyediakan seluruh keperluan bantalan bush yang dibeli oleh perusahaan Sumber Teknik sebanyak masing-masing 25 %, 35 %, 10 % dan 30 %. Dari pengalaman selama ini diketahui bahwa vendor I, II, III, dan IV masing-masing mengirimkan 20 %, 5 %, 30 % dan 10 % bantalan bush yang cacat. Maka probabilitas bahwa sebuah bantalan yang dipilih secara acak merupakan bantalan yang cacat dapat dihitung sebagai berikut. Misalkan *A* adalah peristiwa pemilihan sebuah bantalan yang cacat, dan *B*1, *B*2, *B*3, dan *B*4, adalah peristiwa pemilihan bantalan dari vendor I, II, III, dan IV.

3. Konsep Probabilitas

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{i=1}^{4} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{4} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i) \\
&= P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) + P(A \mid B_3) \cdot P(B_3) + P(A \mid B_4) \cdot P(B_4) \\
&= (0,2)(0,25) + (0,05)(0,35) + (0,3)(0,1) + (0,1)(0,3) \\
&= 0,1275
\end{aligned}
$$

- Kemudian jika terpilih sebuah bantalan cacat, maka probabilitas bantalan cacat itu berasal dari vendor III adalah:

$$
P(B_3 \mid A) = \frac{P(B_3 \cap A)}{P(A)} = \frac{0,03}{0,1275} = 0,2353
$$

3. Konsep Probabilitas

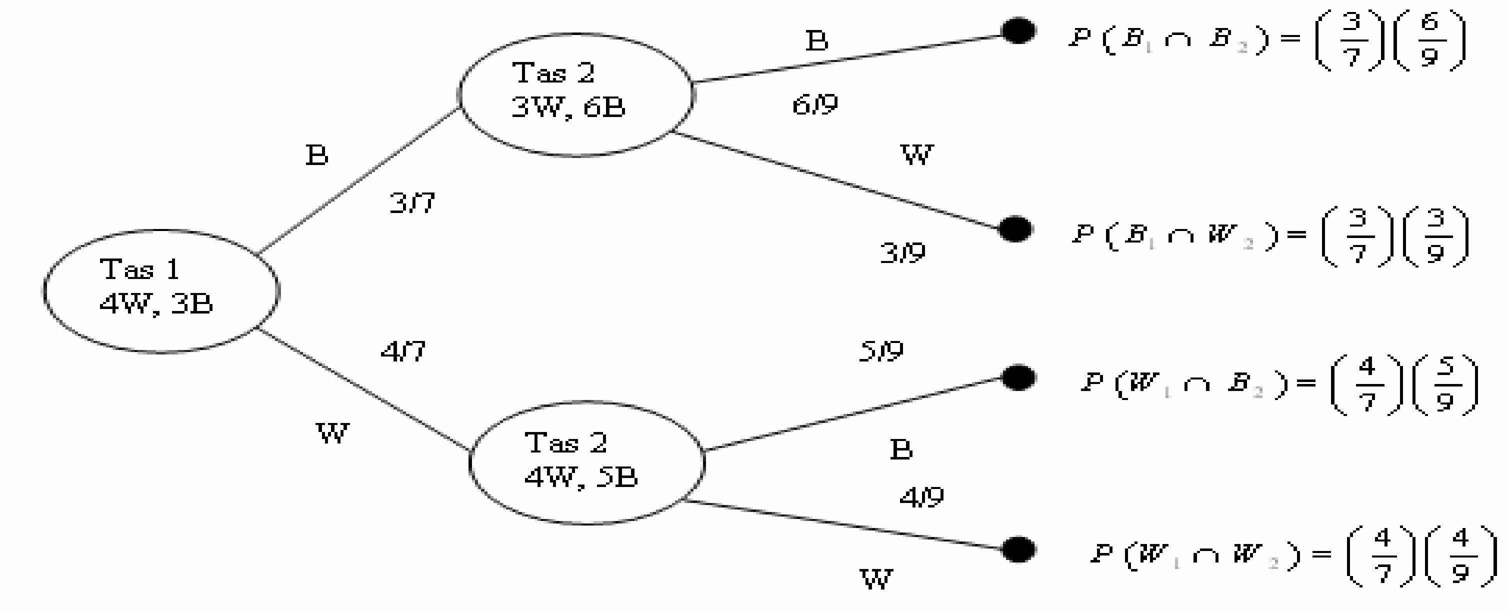
Contoh:

Sebuah tas berisi 4 bola putih dan 3 bola hitam, dan tas yang kedua berisi 3 bola putih dan 5 bola hitam. Satu bola diambil dari tas pertama dan diletakkan tanpa terlihat di dalam tas yang kedua. Berapa probabilitas bahwa sebuah bola yang sekarang ditarik dari tas kedua adalah hitam?

Penyelesaian:

Ambil *B1*, *B2* dan *W1* mewakili secara berurut penarikan sebuah bola hitam dari tas 1, sebuah bola hitam dari tas 2, dan sebuah bola putih dari tas 1. Kita tertarik kepada gabungan dari kejadian saling terpisah $B_1 \cap B_2$ dan $W_1 \cap B_2$

3. Konsep Probabilitas



$$P\left[\left(B_1 \cap B_2\right) atau \left(W_1 \cap B_2\right)\right] = P\left(B_1 \cap B_2\right) + P\left(W_1 \cap B_2\right)$$

$$= P\left(B_1\right)P\left(B_2 \middle| B_1\right) + P\left(W_1\right)P\left(B_2 \middle| W_1\right)$$

$$= \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{6}{9}\right) + \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = \left(\frac{38}{63}\right)$$